Le paradoxe de Russel

Emmanuel Chantréau

8 avril 2019

1 Introduction

Ce texte présente un point de vue global sur le paradoxe de Russel en expliquant l'origine des solutions adoptées pour la théorie des ensembles et Lazi.

2 L'origine du paradoxe de Russel

Nous allons d'abord présenter ce paradoxe pour la langue française car il n'est pas spécifique aux mathématiques et l'habitude de notre langue le rend plus facile à cerner.

Notre langue courante possède beaucoup de règles de différents niveaux réduisant les possibilités d'expressions à celles qui ont un sens, par exemple :

$\xi\Sigma\lambda$: les symboles ne sont pas français

eoin : mot inexistant

il il le : mauvaise grammaire

le chien : phrase incomplète

On peut alors se demander si on peut créer des règles de sorte que toute phrase ait un sens. Une manière indéniable de prouver qu'une phrase est insensée est de prouver que l'on arrive à une contradiction si on lui attribue un sens. Or de telles phrases existent, par exemple : ≪ Cette phrase est fausse. ≫ (si elle a un sens, elle est soit vraie soit fausse, mais dans les deux cas on aboutit à une absurdité). On comprend que c'est l'auto-référence qui pose problème. Et comme le fait remarquer Alexandre Miquel [1], le principe du larsen (boucle sonore haut-parleur/microphone) est un phénomène inhérent à la transmission d'information.

On pourrait supposer qu'il suffit d'éviter de parler de soi-même, mais alors on interdit d'exprimer ≪ Cette phrase est en langue française. ≫, ou plus subtilement d'interdire les auto-références au sens, mais alors il faudrait interdire la page wikipedia sur wikipedia.

En mathématique, quand les mathématiciens ont créé une première version des fondations mathématiques, Russel a identifier ce même genre de larsen avec la phrase ≪ Est-ce que l'ensemble des ensembles qui ne se possèdent pas eux même se possède lui-même ? ≫ : s'il se possède lui même c'est qu'il ne se possède pas lui-même, s'il ne se possède pas lui-même c'est donc qu'il se possède lui-même. Et c'est pour éliminer ce ≪ bug ≫ que les mathématiciens ont été obligé de créer une fondation éliminant ce genre de cas.

3 Les solutions au paradoxe de Russel

3.1 En français

Solution relâchée : On ne présuppose pas que tout phrase est sensée. On autorise les phrases incohérentes et c'est la logique personnelle qui les éliminent.

3.2 En théorie des ensembles

Solution stricte : On se restreint à un ensemble de phrases sensées (toute proposition est soit vraie soit fausse), pour arriver à cela on restreint les constructions pour éviter toute auto-référence.

1. dans ≪ Les théorèmes d'incomplétude de Gödel ≫

3.3 En lazi

Solution relâchée : On ne présuppose pas que tout phrase est sensée. On autorise les phrases incohérentes et ce sont les raisonnements en Lazi qui permettent de déterminer les phrases sensées. Par exemple on peut définir A tq A = non A, mais rien ne permet de prouver que A est soit vrai soit faux.

4 Un problème de la solution stricte

Le larsen est un problème de dépendance en boucle, et le réseau de dépendances peut être énorme ou lié à des raisonnements complexes. Un exemple trivial est : ≪ Si la proposition t est vraie alors cette phrase est fausse, sinon $1 = 1$ ≫, on voit que la phrase a un sens si t est fausse et n'en a pas si t est vraie. Hors la démonstration de t ou $\neg$t est de complexité potentiellement illimitée.

Donc en adoptant une solution stricte on élimine des phrases sensées. Concrètement on se retrouve régulièrement devant un blocage par manque d'expressivité, et c'est le cas actuellement avec l'arrivée de la théorie des catégories. Cela pousse donc à des rafistolages ou schismes récurrents.

D'autre part, vouloir éliminer le problème dans les fondations pousse à des constructions lourdes et éloignées du principe du rasoir d'Ockham. Par exemple :

composant	**mathématiques classiques**	**Lazi**
nombre de symboles	∞	8
règles de grammaire	nombreuses (notions de termes, variables, quantificateurs, connecteurs logiques)	2
règles de déductions	nombreuses, voir Calcul des séquents et Calcul des prédicats	10
nombre d'axiomes	9 plus un shéma d'axiomes ($= \infty$)	0

Il existe d'autres sérieux problèmes de la solution stricte mais ils font l'objet d'autres articles.