Lazi : Les extensions

Emmanuel Chantréau

23 novembre 2016

Table des matières

1 Introduction

Ce texte présente l'intérêt et le fonctionnement des extensions mathématiques en Lazi.

2 Qu'est-ce qu'une fondation mathématique extensible

Dans n'importe quelle mathématique on peut définir d'autres fondations mathématiques, pour cela il est nécessaire de créer une représentation des mathématiques (par exemple Gödel a utiliser un codage par les nombres entiers). Supposons que dans des fondations E0 nous définissions deux fondations E1 et E2 et que nous prouvions que pour un sous ensemble P des preuves de E2 et une fonction f sur P, on ait pour toute $p \in P$ $f(p)$ est une preuve pour E1 de même conclusion que p . Du point de vue de E0, on peut donc utiliser des preuves de E2 pour produire des vérités dans E1.

S'il s'avère que E1=E0, comment utiliser les preuves dans E2 pour prouver des assertions de E0 ? Comme dans E0 nous pouvons prouver que les preuves de P sont traduisibles en E1, il semble qu'il n'y ait pas de problème. Par exemple un mathématicien qui prouverait les relations entre E1 et E2 décrites ci-dessus pourrait alors produire des articles dans les fondations E2 pour en déduire des résultat dans E1 et donc dans E0.

Mais le problème apparaît si nous avions à utiliser un logiciel qui ne reconnaît que les preuves de E0 : il nous serait impossible (si E0 est la théorie des ensembles) d'utiliser les preuves de E2 pour prouver des assertions dans E0. On pourrait prouver que si $p \in P$ alors $f(p)$ est une preuve de E1, mais il ne serait pas possible de prouver que la traduction (E1,E2 ainsi que les preuves et assertions dans ces fondations sont des représentation (des codages) du point de vue de E0) de la conclusion de la preuve est une vérité E0. Pour la simple raison qu'en théorie des ensembles une assertion n'est pas un ensemble, par exemple « $\forall$ » n'est pas un ensemble, il n'existe donc pas de fonction de traduction d'une représentation d'assertion en assertion.

Pour que le programme accepte les preuves de E2, il faudrait qu'il ait une sorte de règle supplémentaire qui stipule qu'il peut utiliser les preuves de E2 si certaines propriétés entre E1 et E2 sont vraies. Cette règle supplémentaire fait parti du « bon sens » des mathématiciens.

Comment Lazi permet d'utiliser des extensions : En Lazi cette règle supplémentaire est une règle de déduction capitale, c'est grâce à elle que les fondations Lazi sont particulièrement petites. Nous donnons plus loin des informations sur ce qui rend Lazi extensible.

3 Importance théorique de l'extensibilité

Les mathématiques définissent une méthode de production de vérités pouvant traiter tout ce qui est parfaitement définit ... *sauf* si on veut utiliser une extension. Pour ce cas spécial il faut sortir des mathématiques pratiquées et utiliser notre bon sens pour décider d'utiliser une autre fondation.

Le problème de ce « sauf » paraîtra probablement inexistant ou cosmétique. Pourtant, quand un mathématicien trouve une méthode pour calculer une fonction sur certains objets, s'il existe des exceptions cela l'interroge car son expérience de l'esthétique lui fait penser qu'il y a là une merveille cachée qui l'attend (pensons par exemple à la racine carrée de nombres négatifs). Mais il en est autrement pour le langage mathématique lui-même, considéré plus comme une émanation de l'esprit humain que comme un objet mathématique en soit. Nous nous trouvons donc devant ce paradoxe qui consiste à porter une grande considération esthétique sur les objets mathématiques, mais pratiquement aucune sur ce qui porte cette esthétique. Nous n'avons encore jamais rencontré en science de domaines à la fois au cœur d'une activité et en même temps privé d'esthétique.

Le développement de Lazi montre que les fondations peuvent être en elles-mêmes très esthétiques et que la propriété d'extensibilité des fondations mathématiques est capitale.

4 Importance pratique de l'extensibilité

L'activité principale du chercheur en mathématique est la démonstration de théorèmes. Pourtant l'histoire des sciences nous montre qu'il existe une autre activité de recherche mathématique, certes rare mais très fructueuse : c'est l'évolution du cadre mathématique. On peut citer par exemple

— l'ajout du zéro
— les anneaux de polynômes
— La recherche de fondations
— Le travail du groupe Bourbaki.
— L'analyse non standard
— La théorie des catégories

Pour faire évoluer le cadre mathématique, que ce soit par des notations, des nouvelles règles ou encore un traitement informatisé, il est fort utile d'avoir une fondation s'y prêtant.

5 Les extensions et le traitement informatisé

Les extensions ne concernent pas forcément de grandes avancées mathématiques, par exemple on peut créer une extension qui ajoute une règle de déduction permettant de déduire une vérité sans avoir à citer le théorème ni les valeur des variables quantifiées à utiliser (la déduction n'est valide que s'il existe un théorème adéquate parmi les vérités et des valeurs permettant la déduction). Cette extension a pour but de simplifier l'écriture de preuves. Donc par exemple si vous avez le théorème « $\forall x; x = x$ », vous pouvez déduire « $1 = 1$ » par la déduction `$L[ 'applyARule' , $Fo[ 1 = 1 ] ]` (où « applyARule » est le nom de la déduction ajoutée par cette extension).

6 Utiliser une extension

Nous avons vue dans la section « Qu'est-ce qu'une fondation mathématique extensible » que si on se place dans une fondation E0, la traduction entre une extension E1 et E2 n'est pas un problème. Le seul problème est la traduction des preuves entre une représentation de E0 et E0. Pour cela nous avons besoin de deux propriétés de la fondation :

6.1 Les assertions sont des objets mathématiques

Les objets de la théorie des ensembles sont les ensembles, et par exemple « $\in$ » n'est pas un ensemble. Les objets de Lazi sont les choses, et les mots clés de Lazi, et plus généralement toutes les expressions, sont des choses (par exemple « if » ou « if if »). Cela peut sembler dépravé car le calcul des prédicats et la théorie des ensembles affirment des propriétés fortes sur respectivement les assertions et les ensembles, ce qui n'est pas le cas avec Lazi.

6.2 La traduction de la conclusion de la représentation d'une preuve est une vérité

Pour avoir cette propriété Lazi contient une règle de déduction spéciale. Cette règle a une propriété dite de « neutralité » : elle ne permet pas de démontrer des vérités supplémentaires mais seulement de les démontrer plus simplement (par des extensions).